CIENCIA
AL DIA*Internacional*
NOVIEMBRE, 2001 NUMERO 2 VOLUMEN 4

Control del caos usando la estrategia OGY

© J. I. Casaubon, 2001
jic@ub.edu.ar

RESUMEN

Ott, Grebogi y Yorke (OGY) publicaron en 1990 su primer artículo sobre el control del caos. A partir de entonces ha crecido el interés en el tema, especialmente por las aplicaciones: no siempre es deseable el comportamiento caótico. La estrategia OGY consiste en usar pequeñas perturbaciones de la órbita, de modo que ésta se estabilice en una de las órbitas periódicas inestables que existen en un atractor caótico. La perturbación pequeña significa que los parámetros, apenas variados, corresponden al pleno caos que se va a controlar. Utilizaremos el simple mapa logístico con el fin de enseñar el control del caos, estabilizando la órbita: 1) En un punto fijo. 2) En un ciclo de período 2.

ABSTRACT

In 1990 Ott, Grebogi and Yorke published the first article on chaos control. Since then interest in this subject has increased, specially because chaotic behavior is not always desirable. The OGY strategy consists of using small perturbations of the orbit so that it stabilizes in one of the unstable periodic orbits existing in a chaotic attractor. Small perturbation means that the parameters, slightly varied, correspond to full extent of the chaos to be controlled. We will use the simple logistic map with a view to teaching chaos control, stabilizing the orbit: 1) In a fixed point. 2) In a period 2 cycle.

Introducción

Las dos grandes revoluciones de la Física del principio del siglo XX son la Mecánica Cuántica de Planck y la Teoría de la Relatividad de Einstein. Así mismo podemos decir que los otros dos grandes descubrimientos de la segunda mitad del siglo XX son la unificación electrodébil de Weimberg y

Salam, y el Caos de Lorenz. La Mecánica Cuántica dice que el intercambio de energía se hace de a “cuantos”, y no en forma continua como lo predice la Mecánica Clásica. Esta mecánica se mostró muy útil para lo microscópico (átomos, moléculas...) pero en lo macroscópico, siguen rigiendo las leyes de Newton. La relatividad especial se aplica a partículas moviéndose a velocidades cercanas a la velocidad de la luz y, nuevamente, podemos usar la Mecánica Clásica para los sistemas que se mueven a velocidades muy inferiores a las de la luz. La Física siempre buscó la unificación entre sus diversas ramas. Así fue como la electricidad y el magnetismo fueron unificadas en el Electromagnetismo. Unificar significa encontrar unas ecuaciones que permitan describir ambas teorías. Son cuatro los tipos fundamentales de fuerzas que existen: fuerte; débil; electromagnética y gravitación. las dos primeras, de origen nuclear. La fuerte es responsable de la atracción entre los nucleones y componentes del núcleo, y la débil, la que explica la emisión beta. La unificación electrodébil logra relacionar el electromagnetismo y la débil.

La teoría del caos vislumbrada por Poincaré a fines de siglo XIX -en pleno auge en la actualidad gracias a los estudios del meteorologista Lorenz en 1963-, se perfiló como una solución a los problemas de dinámica no lineal en la Física, y se basa en el estudio de la la evolución de una magnitud con el tiempo: Tenemos comportamiento caótico cuando la solución oscila con el tiempo de una manera irregular, o sea, cuando la solución de un sistema determinístico se muestra durante grandes periodos de tiempo en forma aperiódica e imprevisible y además posee una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. En la teoría simple de atmósfera de Lorenz, esto quiere decir que es intrínsecamente imposible hacer un pronóstico meteorológico, digamos, para dentro de un mes. Esta teoría de la dinámica no lineal (la suma de soluciones no es solución) desborda el ámbito de la Física (circuitos, péndulos forzados, trayectoria de algunos satélites) y se aplica, aotras ciencias naturales (a nivel macroscópico), a otras magnitudes que varían caprichosamente con el tiempo, como ciertas reacciones químicas, poblaciones de insectos, arritmias, terremotos, fibrilación del corazón e incluso se ha intentado aplicar al mercado de acciones (aunque en este último caso entramos al área de las ciencias sociales, en las que interviene la libertad del hombre, y por lo tanto, no habría determinismo).

Decíamos que el caos también posee una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Es decir, en un sistema no caótico, como la trayectoria de una pelota de fútbol, una pequeña diferencia entre dos puntapiés producirá tiros similares. Cuando tenemos caos, una pequeña diferencia al principio, se agrandará exponencialmente en el futuro. El exponente es el producto de un número positivo, llamado exponente de Liapunov, y el tiempo.

Volviendo al ejemplo meteorológico, la alta sensibilidad a las condiciones iniciales se ejemplifica con el llamado "efecto mariposa". De dos mariposas que aletean en Hong Kong, una puede no producir nada y la otra provocar un huracán en el Caribe.

Otra de las propiedades a destacar es que se trata de caos "determinístico", es decir, no se trata de ruido, sino de soluciones aperiódicas de una o varias ecuaciones bien concretas y que determinan la evolución. Además, no sólo las ecuaciones complicadas producen caos; en algunos casos simples, como en la ecuación logística, también se cumple esta propiedad.

Por último, se dice que las soluciones que varían de forma tan "arbitraria", entran en un atractor extraño, cuyas propiedades geométricas son las de un "fractal" (Strogatz 1994).

Un fractal podría ejemplificarse como una foto donde hay una persona que tiene en su mano una foto, donde aparece la misma persona con una foto... y así indefinidamente. Es decir, un fractal tiene estructura a escalas arbitrariamente pequeñas, es autosimilar y su dimensión no siempre es un entero. Esto último significa que un objeto de dimensión 1, como un segmento de recta, puede transformarse en el fractal de Cantor si lo dividimos en tres y le suprimimos el tercio central; luego, con los dos segmentos que quedan, vuelvo a suprimir el tercio central, y así sucesivamente hasta el infinito. El resultado puede calcularse con una nueva forma de definir "dimensión" y tiene dimensión 0.63 (esto da una idea de lo "agujereado" que quedó el segmento, casi pulverizado)

Pueden generarse fractales usando unas sencillas fórmulas recursivas (i.e., que se llaman a sí mismas) en un PC y obtener lindas formas geométricas semejantes a los árboles, las nubes o la costa irregular de una isla. La geometría que estudiamos en la escuela -y que incluye figuras más simples, como esferas, cubos, conos, y otros-, no puede representar formas irregulares, que son las que realmente muestra la naturaleza, como el sistema de vasos sanguíneos y sus capilares. Los fractales sí son capaces de representarlos.

Los primeros intentos para controlar el caos son recientes, datan de 1990 y se volvieron un tema importantísimo porque no siempre éste es deseable. Tomemos el caso de un ingeniero que necesite que una máquina funcione a determinada frecuencia. Por supuesto, un funcionamiento caótico de dicha máquina (es decir, que funcione con una distribución continua de frecuencias) no sería nada deseable. Ott, Grebogi y Yorke (Método OGY) son los pioneros en el áreadel control del caos. Su estrategia es estabilizar el sistema usando pequeñas variaciones al parámetro que gobierna el caos para estabilizar la órbita en un punto fijo (quietud), o en una órbita periódica inestable presente en el seno del caos (como en el movimiento circular, por ejemplo). La estrategia OGY sirve para controlar el caos permanente. Y ellos mismos han encontrado que a veces es deseable el caos, porque teniendo caos uno puede elegir, al controlar, el tipo de órbita periódica deseada.

Todo lo dicho se refiere al caos permanente. Sin embargo, muy poco se ha hecho para controlar el caos transitorio (www.ciencia.cl/CienciaAlDia volumen 3, número 2), obteniéndose una baja probabilidad de control en este caso. En el caso de control del caos transitorio sucede que el sistema generalmente sale del régimen caótico antes de que sea controlado.

Ott, Grebogi y Yorke mostraron que puede controlarse el simple Caos permanente en un punto fijo, en una órbita de período 2 o en una enorme cantidad posibles de órbitas periódicas inestables. Esta flexibilidad multipropósito es propio de los seres desarrollados y se especula que el Caos es una componente del funcionamiento del cerebro y su control sería centrar la atención en alguna idea concreta.

Cálculos

La presencia del caos en sistemas físicos ha sido extensamente demostrado. Suponemos que es imposible hacer un gran cambio al sistema para llevarlo a la zona periódica. Ott, Grebogi y Yorke (OGY) propusieron en 1990 un método de control del caos basado en pequeñas perturbaciones dependientes del tiempo, de modo que la órbita se estabilice en una de las órbitas periódicas inestables que existen en un atractor caótico. La perturbación pequeña significa que los parámetros, apenas variados, corresponden al pleno caos que se va a controlar.

Para clarificar el método OGY, lo aplicaremos a una de las más sencillas fórmulas de recurrencia que presentan caos: El mapa Logístico siguiente:

$$X_{n+1} = r\,(X_n - X_n^2) \qquad (1)$$

El caos se da a partir de r > 3.569946... excepto para algunas ventanas periódicas. Entonces si tenemos pleno caos, por ejemplo r = 3.78, la idea OGY no es cambiar drásticamente el r hasta la zona periódica; ni siquiera hasta una ventana periódica cercana. Tratamos de controlar el caos con variaciones muy pequeñas de r en plena zona caótica.
La clave del método consiste en estabilizar la órbita (los Xn) en alguna de las infinitas órbitas inestables que hay dentro del atractor caótico. En particular, controlaremos en el punto fijo inestable 1-1/r y en la órbita de período 2 correspondiente a la ecuación (2)

Para el control hemos usado el método OGY simplificado por Flynn y Wilson (1998).

$$\frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \qquad (2)$$

A) ESTABILIZACIÓN EN UN PUNTO FIJO:

Para estabilizar la órbita en el punto fijo inestable 1-1/r procedemos esquemáticamente así:

1) r0 = 3.78
2) Calcular Xn
3) Calcular rp=1/(1- Xn)
4) Si |rp-r0 |< 0.01 entonces r = rp
5) Volver a 2)

Ver abajo programa en Basic y Figura 1.

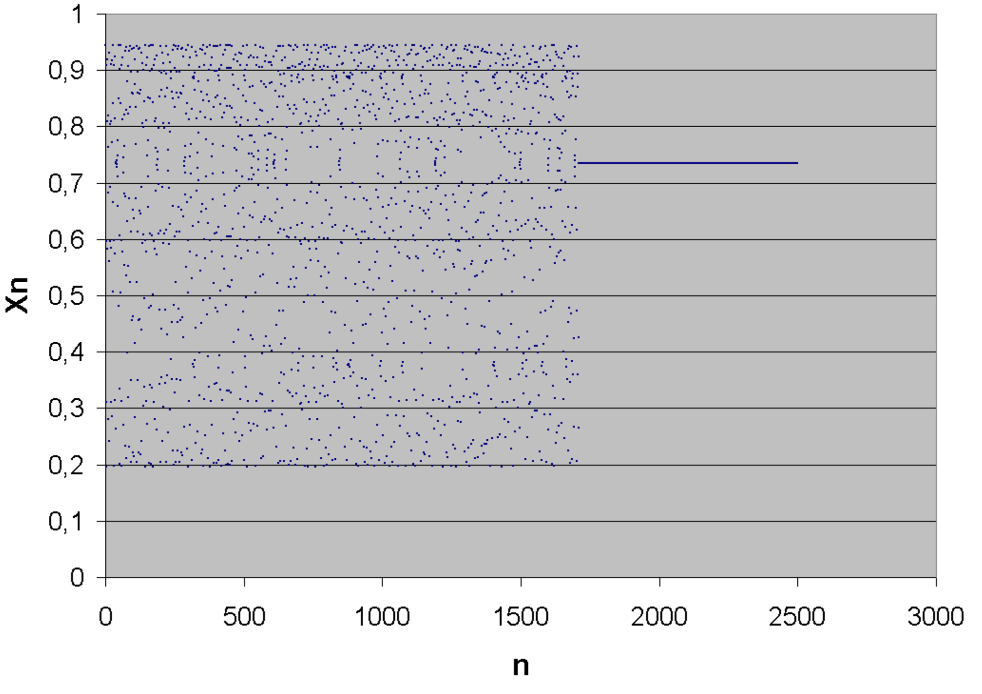

Figura 1: Control del caos en un punto fijo

B) ESTABILIZACIÓN EN UN CICLO DE PERIODO 2:

Para estabilizar la órbita en la órbita inestable de período 2, procedemos esquemáticamente así:

1) r0 = 3.78
2) Calcular Xn
3) Calcular Xn+1
3) Calcular rp= Xn/(Xn+1 - [Xn+1]2)
6) Si |rp-r0 |< 0.01 entonces r = rp
7) Volver a 2)

Ver programa en el Apéndice y figura 2.

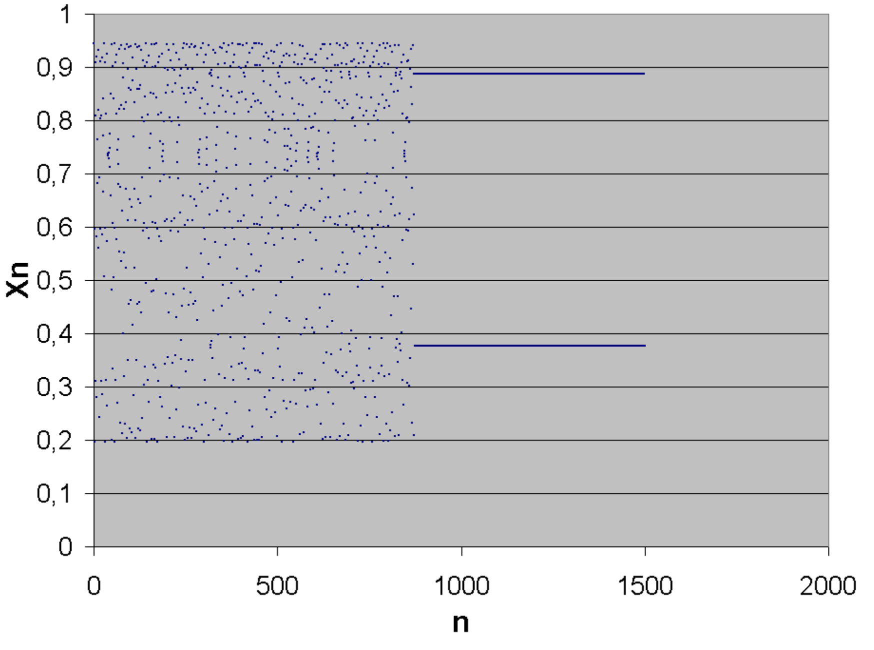

Figura 2: Control del caos en una órbita de período 2

Hemos visto como controlar el caos llevándolo a un punto fijo o a una órbita periódica (2-ciclo). El método OGY permite así, en principio, estabilizar el caos en cualquier órbita periódica inestable elegida con un leve cambio del parámetro, y entonces, la presencia de caos tiene mayor ventaja. Físicamente significa que no se debe rediseñar el experimento cambiando completamente el parámetro para tener una órbita de un tipo u otro, sino que, estando en el caos, se puede elegir fácilmente el sistema periódico que más convenga usando esta forma de control. Es más, se puede pasar fácilmente de un comportamiento periódico a otro buceando dentro del caos y sin una alteración costosa del sistema. Esta flexibilidad "multipropósito" es esencial en las formas de vida más complejas, y podemos especular que el caos es un ingrediente necesario para la regulación del cerebro (Ott, Grebogi y Yorke, 1990).

Apéndice

```
'PROGRAMA EN BASIC PARA CONTROLAR EL CAOS EN UN PUNTO
FIJO ‘
OPEN "C:OGYLOG1.XLS" FOR OUTPUT AS #1
i=1
X=.5
r0=3.78
r=r0
1 X=r*(X-X^2)
PRINT #1 X
i=i+1
IF i>2500 THEN GOTO 3
rp=1/(1-X)
IF ABS(rp-r0)<0.01 THEN GOTO 2
GOTO 1
2 r=rp
GOTO 1
3 CLOSE #1
END
```

```
'PROGRAMA EN BASIC PARA CONTROLAR EN UNA ÓRBITA DE
PERÍODO 2
OPEN "C:OGYLOG2.XLS" FOR OUTPUT AS #1
i=1
X=.5
j=0
r0=3.78
r=r0
1 X=r*(X-X^2)
PRINT #1 X
IF j=0 THEN GOTO 2
GOTO 3
2 X1=X
j=1
i=i+1
GOTO 1
3 X2=X
j=0
```

```
i=i+1
IF i>1500 THEN GOTO 5
rp=X1/(X2-X2^2)
IF ABS(rp-r0)<0.01 THEN GOTO 4
GOTO 1
4 r=rp
GOTO 1
5 CLOSE #1
END
```

Punteros de interés

http://www.ang-physik.uni-kiel.de/~stephan/OdeControl.html

Referencias

Strogatz, S. H. (1994). Nonlinear dynamics and chaos. Perseus Books, Reading, Massachusetts

Ott E, Grebogi C, Yorke J A, "Controlling Chaos" Phys. Rev. Lett. 1990, 64, 1196

Flynn C, Wilson N, "A simple method for controlling Chaos" Am. J. Phys. 1998, 66, 730

Juan Ignacio Casaubon. Doctor en Física (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires http://www.uba.ar/). Investigador del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET http://www.secyt.gov.ar/). Profesor Asociado de Física (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Belgrano http://www.ub.edu.ar/).